Réf. http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Espace_etudiant/Pdf_Capes/L13_Transformations_du_plan_Frises_et_pavages.pdf

Leçon 13 :
Transformations du plan. Frises et pavages.

Prérequis

- Médiatrice
- Angle et longueur
- Polygones et polygones réguliers
- Fonctions

Cette leçon est placée à niveau de cycle 4.

Plan

I) Transformations du plan
- 1) Introduction
- 2) Symétrie axiale
- 3) Rotation
- 4) Symétrie centrale
- 5) Translation
- 6) Propriétés

II) Pavages
- 1) Définitions
- 2) Applications

III) Frises
- 1) Définition et propriétés
- 2) Application

I) Transformations du plan

1) Introduction

<u>Remarque :</u>

Une transformation t associe à une figure F du plan une autre figure F' du plan. On dit que F' est l'image de F par la transformation t et F' est unique.

$$t : F \rightarrow t(F) = F'$$

I) Transformations du plan
2) Symétrie axiale

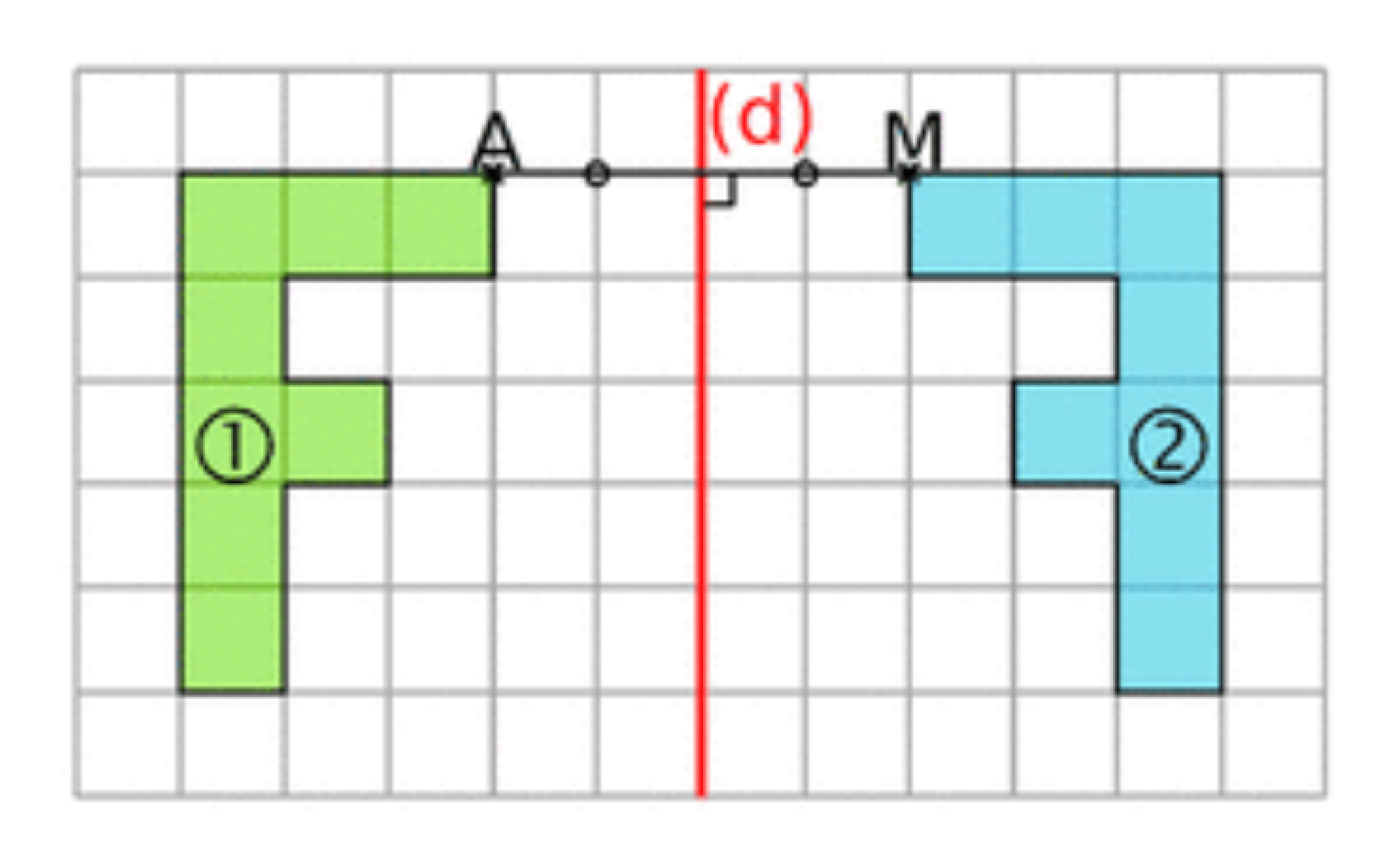
Définition :

Le symétrique d'un point A par rapport à une droite (D) est le point M tel que la droite (D) soit la médiatrice de [AM].

Définition :

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si elles se superposent par pliage le long de cette droite. Cette droite est appelée l'axe de symétrie.

I) Transformations du plan
2) Symétrie axiale



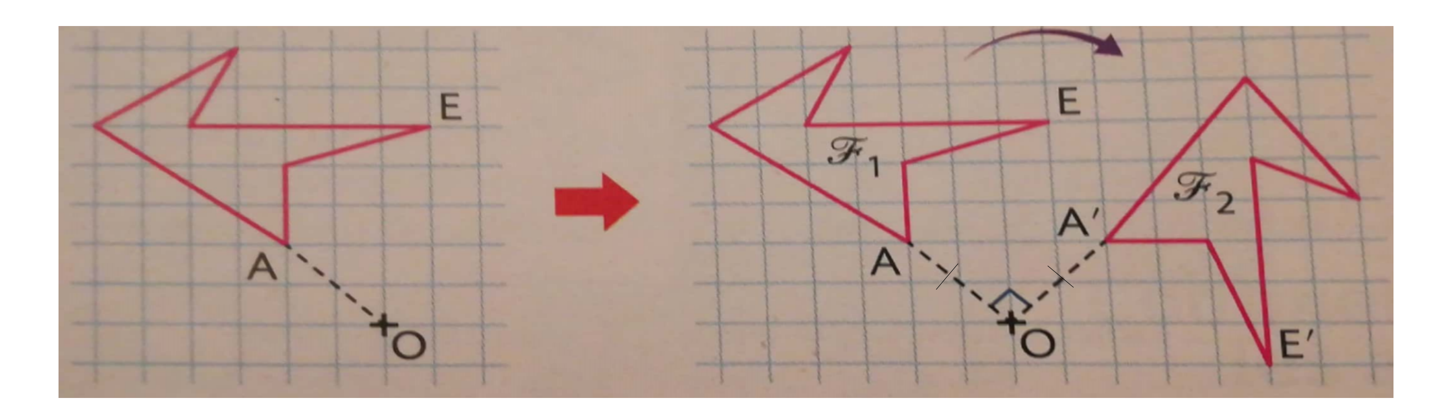
I) Transformations du plan
3) Rotation

Définition :

La rotation de centre O, d'angle α dans un sens donné du point M du plan est le point M' tel que OMM' soit un triangle isocèle en O. De plus,

$$(\widehat{OM, OM'}) = \alpha$$

Exemple : Rotation de centre O, d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire).



I) Transformations du plan
4) Symétrie centrale

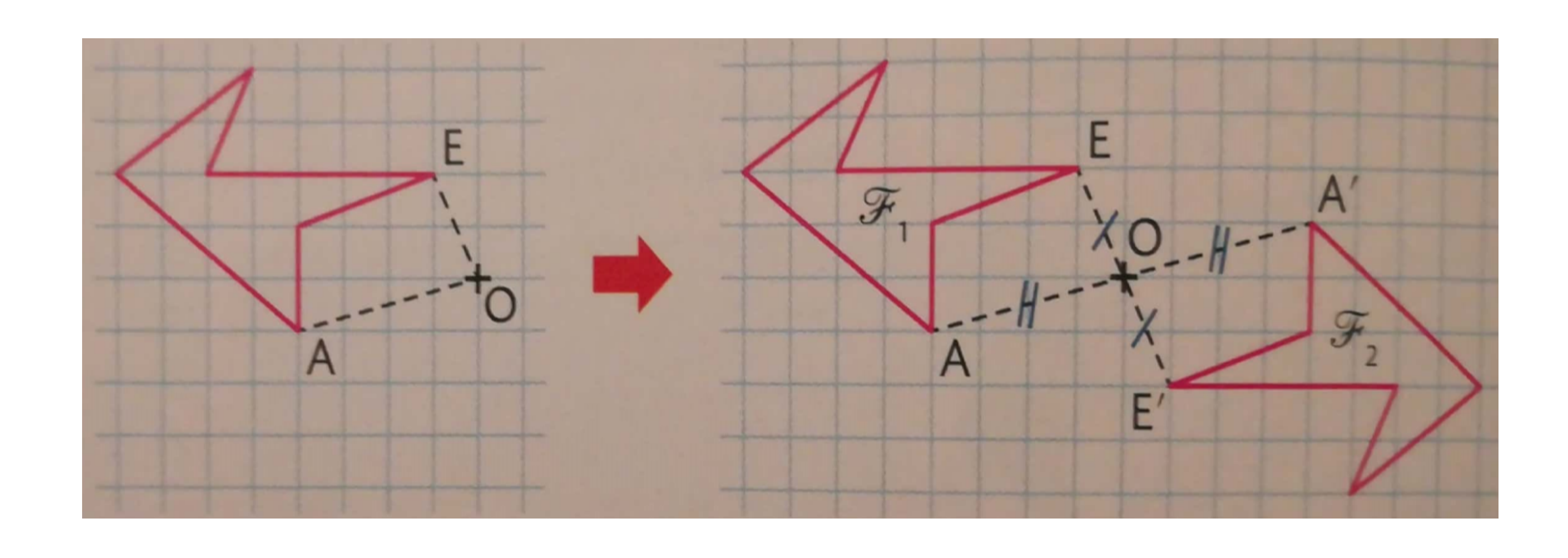
Définition :

Soit un point M du plan tel que M' est l'image de M par une symétrie centrale. Le centre de symétrie O est le milieu du segment [MM'].

Remarque :

Appliquer une symétrie centrale à une figure est équivalent à faire une rotation d'angle 180° qui a pour centre de rotation le centre de la symétrie centrale.

I) Transformations du plan
4) Symétrie centrale



I) Transformations du plan
5) Translation

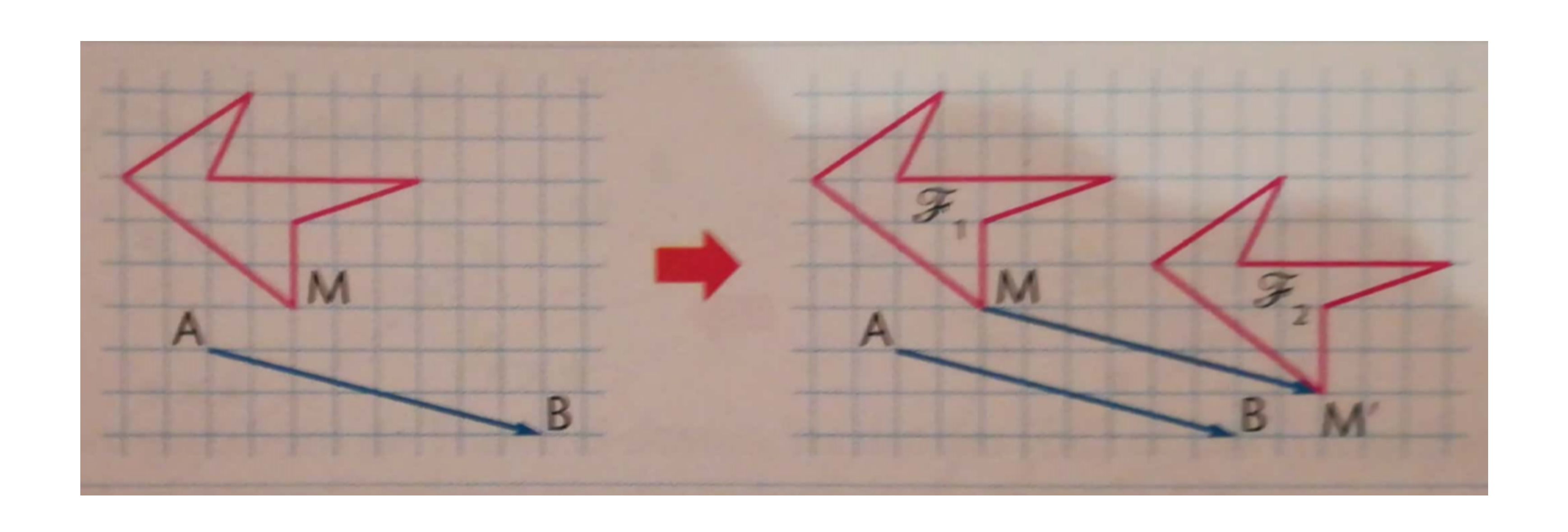
Définition :

Soit A et B deux points du plan distincts. Appliquer la translation qui envoie A sur B à un point M du plan consiste à faire glisser le point selon la direction de la droite (AB), dans le sens de A vers B et de longueur AB. Ainsi on obtient son image M'.

Remarque :

On représente la translation qui envoie A sur B par une flèche allant de A vers B.

I) Transformations du plan
5) Translation



I) Transformations du plan
6) Propriétés

Propriété :

Soit t une symétrie axiale, une rotation, une symétrie centrale ou une translation. On dit alors que t conserve : l'alignement des points, les distances, les angles, les aires, le parallélisme et l'orthogonalité des droites.

Propriété :

Soit t une symétrie axiale, une symétrie centrale ou une translation. Alors toute droite du plan a pour image par t une droite qui lui ait parallèle.

II) Frises
1) Définition

Définitions :

On appelle bande du plan (ou ruban) la zone comprise entre deux droites parallèles. On appelle l'âme de la bande l'axe de symétrie des deux droites parallèles définissant la bande.

Définition :

Une frise est une bande du plan dans laquelle un motif (figure du plan) se répète régulièrement par une même translation.

II) Frises

1) Définition

Définitions :

On appelle motif de base le motif associé à la translation la plus courte pour répéter un motif de la bande. Celui-ci peut-être obtenu à partir d'un motif élémentaire auquel on a appliqué des symétries axiales, symétries centrales, translation ou rotations.

II) Frises
2) Applications

<u>Activité géogébra : Construction d'une frise</u>

1) Reproduire le motif élémentaire ci-contre.

2) Réaliser trois rotations de centre B, dans le sens horaire d'angles 90°, 180° et 270° pour obtenir le motif de base de la frise.

3) Réaliser l'image du motif de base par la translation qui envoie D sur son image par la rotation de centre B et d'angle 270° dans le sens horaire.

II) Frises
2) Applications

<u>Exercice :</u>



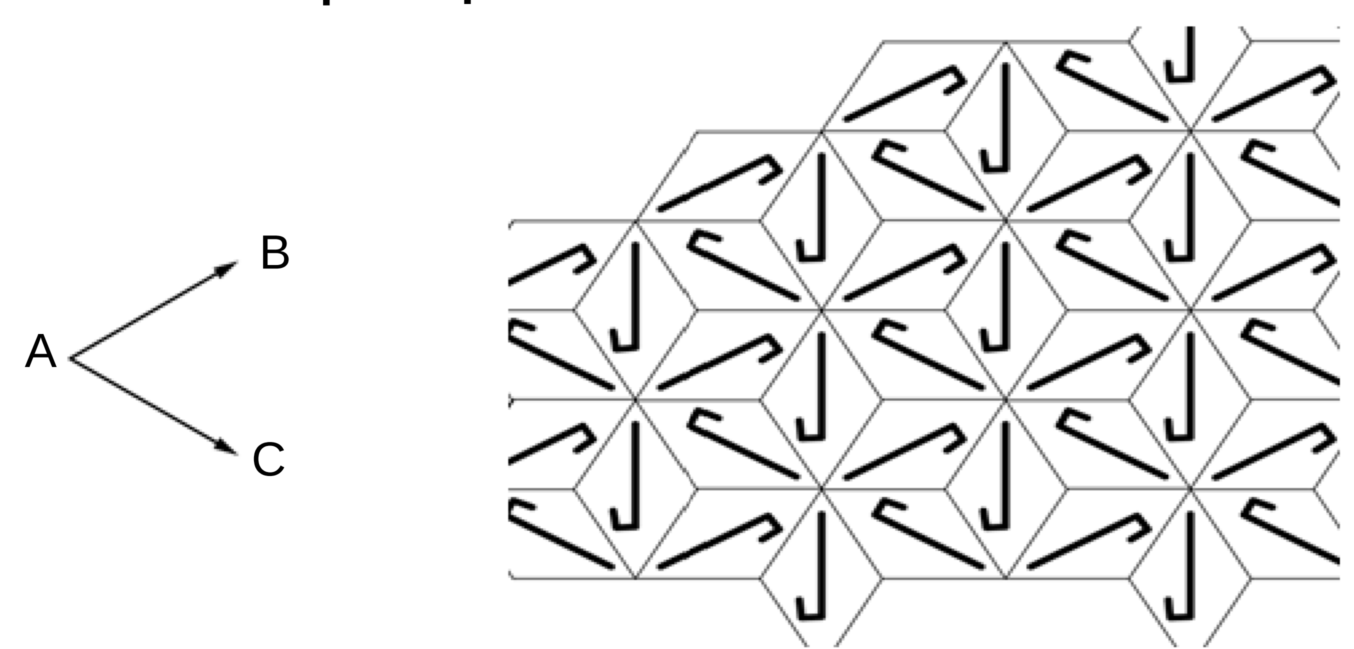
1) Identifier un motif de base de cette frise.
2) Identifier un motif élémentaire de la frise ainsi que les transformations nécessaires pour obtenir un motif de base.

III) Pavages
1) Définitions et propriétés

<u>Définition:</u>

Soient A, B et C trois points du plan.

Un pavage est une portion de plan dans laquelle un motif de base se répète régulièrement par deux translations, une qui envoie A sur B, une qui envoie A sur C, telles que (AB) et (AC) ne soient pas parallèles.



III) Pavages
1) Définitions et propriétés

Proposition:

Les seuls pavages par polygone régulier du plan sont ceux avec des triangles isocèles, des carrés ou des hexagones.

Propriété :

Soit ABCD un parallélogramme du plan.
Si on applique la translation qui envoie D sur A et la translation qui envoie D sur C à ABCD alors on obtient un pavage par parallélogramme.

III) Pavages
2) Application

Activité Scratch :

Ecrire le programme permettant de paver le plan avec le lutin « stop » comme la figure ci-dessous.

